

آموزش مفهومی و محتوایی هندسه تحلیلی

سال یازدهم



به سبک

سامان مطلبی

ضمیمه لوح های تصویری
براساس جدید ترین تغییرات تیپ بندی
سوالات کنکور سراسری مبتنی بر
محتوای کتاب درسی

برای تهیه لوح های تصویری با شماره

۰۹۱۲۱۱۱۴۱۵۷ تماس بگیرید.

معادله خط :

$$y = mx + b$$

$$y = 2x + 2$$

$$4 = 2(1) + \text{?}$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$y = ax + b$
 استاندارد
 $ax + by + c = 0$
 گسترده (ضری)

رابطه بین معادله خط و برداشت معادله خط :
 عرض از مبدأ : برداشت معادله خط :
 طول از مبدأ : برداشت معادله خط :

روابط بین شیب دو معادله خط :

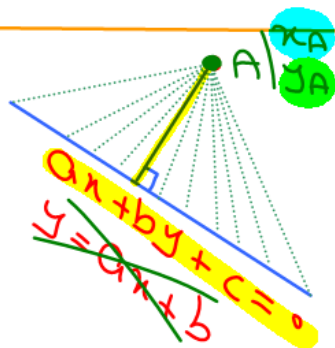
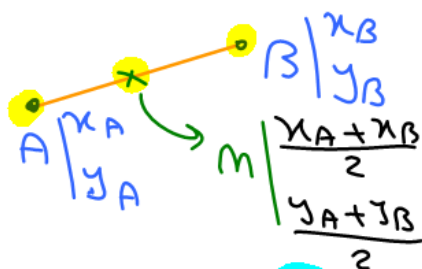
$m = m'$ دو خط موازی
 $m \times m' = -1$ دو خط عمود
 (شیب اقربینه و معکوس هم)



فاصله بین دو نقطه از هم :

$$d = |AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

نقطه میانی و خط پاره خط :



فاصله نقطه از خط :

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

روش تغییر متغیر

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{با } x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$t = 1 = x^2 \rightarrow x = \pm 1$
 $t = 2 = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

$(x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = 0$
 $x-1 = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = 1 = x-1 \Rightarrow x = 2$
 $t = 2 = x-1 \Rightarrow x = 3$

تکرار

معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta > 0$: دو ریشه حقیقی
 $\Delta = 0$: یک ریشه مضاعف
 $\Delta < 0$: ریشه حقیقی ندارد

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Delta = 9 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

$$\frac{3 \pm 1}{2(1)} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Delta = 25 - 4(3)(2) = 1 > 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Delta = 16 - 4(1)(4) = 0$$

$$\frac{4 \pm 0}{2(1)} = 2$$

$$1x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$$

ضرب جمع

معادله‌ی درجه‌ی 2
 > هشی: $a=1$ عوض کن

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

ضرب جمع

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} = 1 \end{array} \right. \text{ اما } \leftarrow \text{دلار - هزار - عوض کن} \quad a \neq 1$$

پی برد: جمع ریشه‌ها و یا ضرب
 ریشه‌ها بدست می‌آید معادله

$$ax^2 + bx + c = 0$$

{ α
 β

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$① x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{(-3)}{1} = +3$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{+2}{1} = +2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

ترکی پرو و کار راه اندازه

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = |\sqrt{S - 2\sqrt{P}}|$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند

$$\frac{\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}}{\frac{\beta^3 + \alpha^3}{(\alpha\beta)^3}} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3} = \frac{125 - 3(1)(5)}{(1)^3} = 110$$

لایه لایه:

$S = +5$
 $P = +1$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند مقدار عبارت زیر را بیابید: (نسبتی)

$$(2\alpha^3 - \alpha)(2\beta^3 - \beta) =$$

$$\alpha(2\alpha^2 - 1) \quad 3\beta^2$$

$$3\alpha$$

$$3\alpha^2$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$$

$$2\alpha^2 - 1 = 3\alpha$$

$$S = 3/2$$

$$P = -1/2$$

$$9(\alpha\beta)^2 = 9(P)^2 = 9/4$$

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند عبارت زیر را محاسبه کنید: (همه) بالایی

$$(2\alpha^3 - \alpha)(2\beta^3 - \beta)$$

$$\alpha(2\alpha^2 - 1)$$

$$\beta(2\beta^2 - 1)$$

$$3\alpha^2$$

$$3\beta^2$$

$$9\alpha^2\beta^2$$

$$= 9(\alpha\beta)^2 = 9P^2 = 9/4$$

$$2\beta^2 - 3\beta - 1 = 0$$

$$2\beta^2 - 1 = 3\beta$$

$$S = 3/2$$

$$P = -1/2$$

نوشتن معادله درجه دوم یا داشتن ریشه α و β بخواهیم معادله درجه دوم بنویسیم

$$\alpha + \beta = S$$

$$\alpha \times \beta = P$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

معادله درجه دوم بنویسید که ریشه آن $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$ باشد

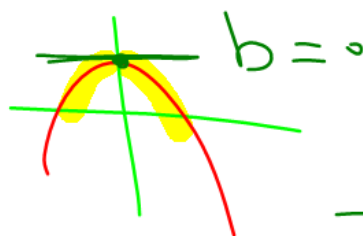
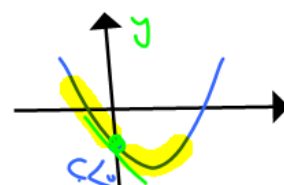
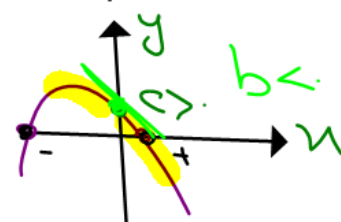
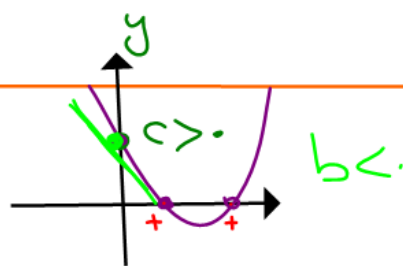
$$S = 6 \quad P = 9 - 5 = 4 \quad x^2 - 6x + 4 = 0$$

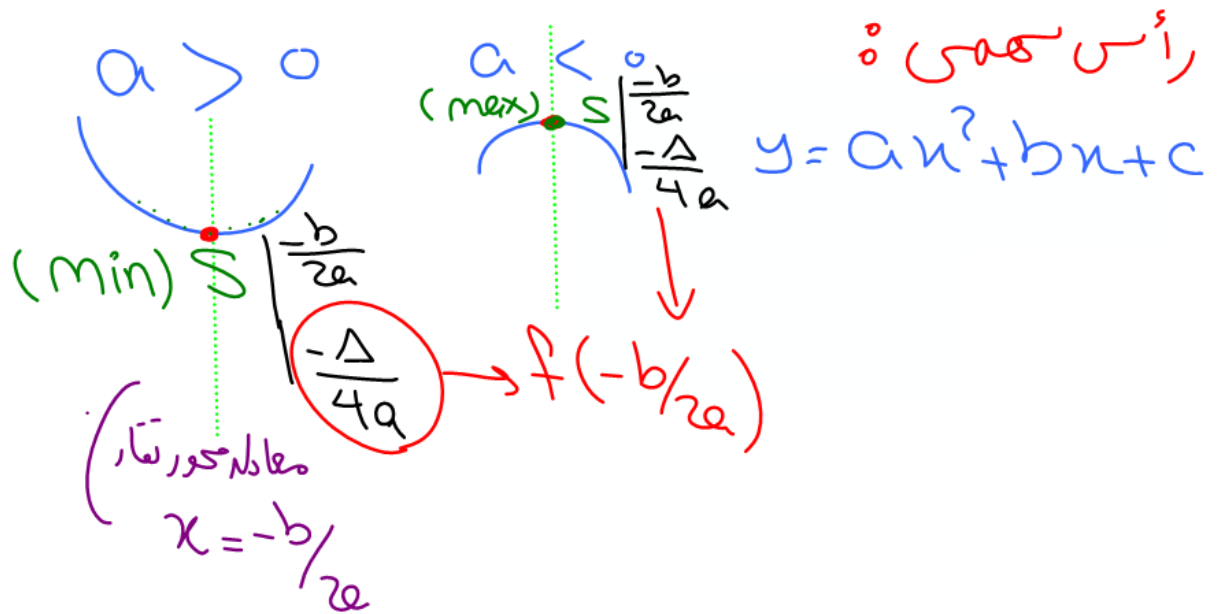
معادله‌ی درجه دوم بنویسید که ریشه‌ی آن مجذور ریشه‌ی
 معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد (ریشه‌ی این معادله α و β است)

$$\left. \begin{aligned} x^2 - Sx + P \\ S = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \\ P = \alpha^2 \times \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} S &= +3 = \alpha + \beta \\ P &= +1 = \alpha \times \beta \\ (3)^2 - 2(1) &= 7 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0$$

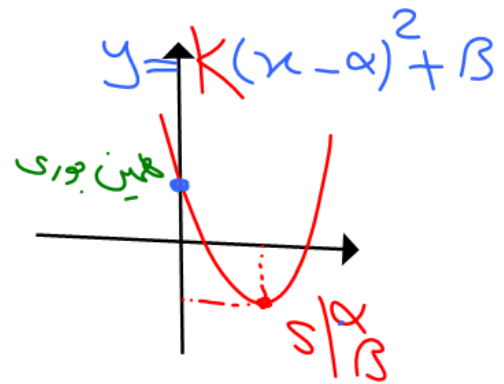
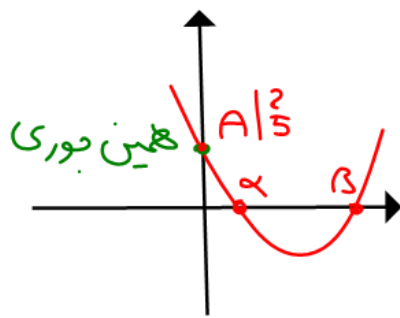
$$y = ax^2 + bx + c$$





نوشتن معادله ی سهمی از روی نمودار

$$y = K(x - \alpha)(x - \beta)$$



حل معادله ؟ رادیکالی °

به رادیکال به ورشماله ← طرفین به توان 2

لصقه و لا صقی

حال معادله های کسری °

خرج مشترک در طرفین ضرب کن

لصقه / لا صقه

مثال :

اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند:

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس B^2 را محاسبه کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

ب) $B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

مثال :

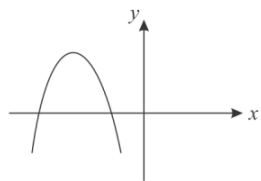
اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $\alpha\beta^2 + 4 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha\beta^2 + 4 = (\alpha\beta)\beta + 4 = P\beta + 4 = 0 \\ P = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = -1$$

ریشه معادله است: $\beta = -1 \Rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{-5}{3}$

مثال :

در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



نمودار، محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند در نتیجه معادله دو جواب دارد. $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$

مثال :

محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

$$2(a + b) = 18 \Rightarrow S = a + b = 9$$

$$P = a \times b = 14 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x - 7)(x - 2) = 0 \Rightarrow b = 2, a = 7$$

فرض کنیم a طول و b عرض مستطیل باشد.

مثال :

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

$$\alpha + \beta = 2 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{2+2}{-1+2+1} = 2 \\ P = \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{1}{-1+2+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

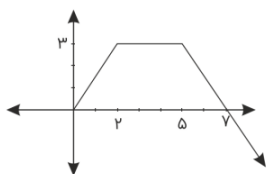
مثال :

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

الف) مجموعه جواب معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5$ برابر است با

ب) اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه تابع $y = |x-3| + |x-1|$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است با

پ) تابع زیر در بازه صعودی اکید و در بازه نزولی اکید و در بازه ثابت است.



ت) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند ریشه‌های معادله درجه دوم $cx^2 + bx + a = 0$ برابرند با و ($c \neq 0$).

(الف)

برای حل معادله، طرفین را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5 \Rightarrow x(x-1) + 3(x-3) = 5(x-1)(x-3)$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 3x - 9 = 5(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 9 = 5x^2 - 20x + 15$$

$$4x^2 - 22x + 24 = 0 \Rightarrow 2(2x^2 - 11x + 12) = 0$$

$$2(2x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = 4$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ 4, \frac{3}{2} \right\}$$

$$x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 < 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y = -(x-3) - (x-1) = -2x+4$$

(ب)

(پ)
[0, 2]: صعودی اکید
[5, +∞): نزولی اکید
[2, 5]: ثابت

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} (*)$$

$$P' = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$$

(ت)

$$S' = \frac{-b}{c}, P' = \frac{a}{c}$$

$$S' = \frac{-b}{c} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$$

پس ریشه‌ها به صورت $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هستند.

مثال :

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

(الف) مجموعه جواب معادله $x + \sqrt{x} = 6$ برابر است با

(ب) وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-3}$ برابر است با تابع

(ب)

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = 2x+1 \Rightarrow xy - 2x = 1+3y$$

$$x(y-2) = 1+3y \Rightarrow x = \frac{1+3y}{y-2} \Rightarrow y^{-1} = \frac{1+3x}{x-2} \quad (o/5)$$

(الف)

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x = 36 + x^2 - 12x$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow \Delta = 169 - 4(36) = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13+5}{2} = 9 \times \\ x = \frac{13-5}{2} = 4 \checkmark \end{cases}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \{4\} \quad (o/5)$$

مثال :

معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\frac{5(x-2) - 4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 5x - 14 = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases} \quad \text{غ.ق.ق}$$

مثال :

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

الف) جواب معادله $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر می باشد.

ب) اگر $f(x) = [x + 3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2 - \sqrt{2})$ برابر است.

الف) برابر با ۱ می باشد. (۵/۰)

ب) برابر با ۳ است (۵/۰).

مثال :

به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x+a}{x} - \frac{x}{x+a} = \frac{4a}{x+a}$ دارای جواب $x = 1$ است.

$$\underbrace{\frac{1+a}{1} - \frac{1}{1+a} = \frac{4a}{1+a}}_{(۵/۲۰)} \rightarrow \underbrace{\frac{a^2 + 2a + 1 - 1 - 4a}{1+a}}_{(۵/۲۰)} = ۰ \rightarrow \underbrace{a^2 - 2a}_{(۵/۲۰)} = ۰$$

$$a = 2 \quad (۵/۲۰), \quad a = ۰ \quad (۵/۲۰)$$

مثال :

دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید.

(الف) دامنهٔ gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(ب) تابع $P(x) = f(x) + g(x)$ را به دست آورید.

$$D_f = (-\infty, 1] \quad (\circ/۲۵) \quad , \quad D_g = [1, +\infty) \quad (\circ/۲۵)$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad (\circ/۲۵)$$

$$\Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \in [1, +\infty)\} \quad (\circ/۲۵) \Rightarrow D_{\text{gof}} = (-\infty, 0] \quad (\circ/۲۵)$$

(الف)

$$D_p = \underbrace{D_f \cap D_g}_{(\circ/۲۵)} = \underbrace{\{1\}}_{(\circ/۲۵)}$$

$$P(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad (\circ/۲۵) \Rightarrow P = \{(1, 0)\}$$

(ب)

مثال :

اگر $x = ۲$ یک جواب معادلهٔ $\frac{۲x^۲}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد:

(الف) a را تعیین کنید.

(ب) به ازای $a = ۰$ ، ریشهٔ این معادله را در صورت وجود به دست آورید.

$$\frac{۱}{a+۲} + \frac{a-۲}{۲} = \frac{a}{۲} \quad (\circ/۲۵) \Rightarrow \frac{۱}{a+۲} = \frac{۲}{۲} \Rightarrow a = ۶ \quad (\circ/۲۵)$$

(الف)

$$\frac{۲x^۲}{x} + \frac{-x}{x} = ۰ \quad (\circ/۲۵) \Rightarrow \frac{۲x^۲ - x}{x} = ۰ \quad (\circ/۲۵) \Rightarrow x = \frac{1}{۲} \quad (\circ/۲۵) \Rightarrow x = ۰ \quad \text{غ.ق.ق.} \quad (\circ/۲۵)$$

(ب)