

آموزشی ، مفهومی و محتوایی

حسابان ۱

(ویژه رشته ریاضی)



به سبک
سامان مطلبی

ضمیمه لوح های تصویری

براساس جدید ترین تغییرات تیپ بندی

سوالات امتحان پایانی مبتنی بر

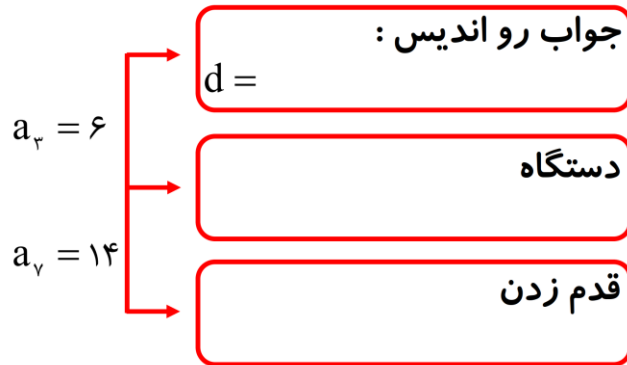
محتوای کتاب درسی

برای تهیه لوح های تصویری با شماره

۰۹۱۲۱۱۱۴۱۵۷ تماس بگیرید.

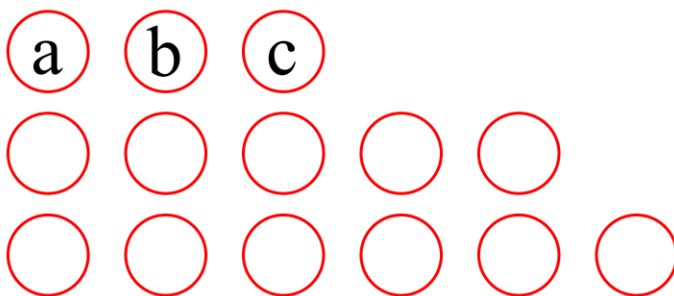
دنباله ی عددی (حسابی)

جمله عمومی :



مثال :

مثال ۱ : اگر a, b, c سه جمله ی متوالی از دنباله ی حسابی باشند :



مجموع n جمله اول از دنباله های حسابی :



اگر n جمله ی اول نبود و جمله ی n ام تا m ام خواست چی :

مثال :

در یک دنباله ی عددی ، مجموع چهار جمله ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله ی بعد آن ۳۰ می باشد ،
جمله یازدهم این دنباله کدام است ؟

۹ (۴)

۸ / ۵ (۳)

۸ (۲)

۷ / ۵ (۱)

کنکور سراسری

مثال :

اعداد $\dots, \frac{5}{2}, y, x, 1$ ، چهار جمله ی اول یک دنباله ی عددی اند . مجموع پانزده جمله ی اول این دنباله کدام است ؟

۶۸ (۴)

۶۷ / ۵ (۳)

۶۲ / ۵ (۲)

۵۷ (۱)

کنکور سراسری

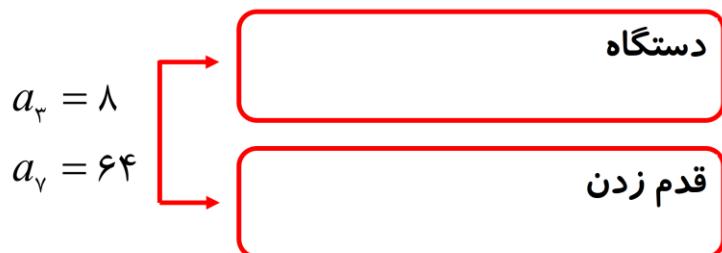
مثال :

مجموع n جمله ی اول از یک دنباله ی عددی به صورت $s_n = \frac{n(n-15)}{2}$ است . در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله ی هفتم و ختم به جمله ی هجدهم ، کدام است ؟

دنباله های هندسی

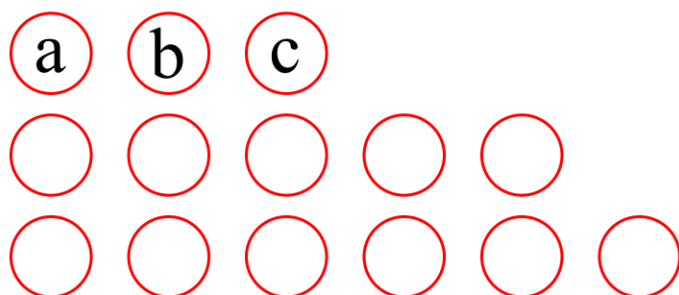
جمله عمومی :

اگر دو جمله را از دنباله داشتیم :



مثال

اگر a ، b ، c سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی باشند :



مثال

در یک دنباله ی عددی ، جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی صعودی اند ، قدر نسبت این دنباله کدام است ؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{6}{5} \quad (۱)$$

کنکور سراسری

مثال

دنباله ی هندسی ... ، $\frac{1}{2}$ ، x ، ۲ غیر نزولی است . مجموع شش جمله ی اول آن کدام است ؟

$$\frac{23}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{21}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{41}{32} \quad (۱)$$

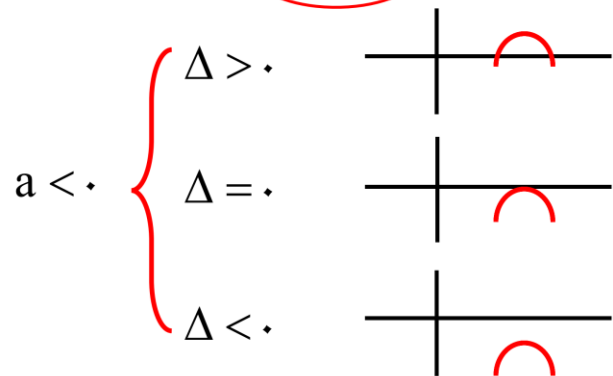
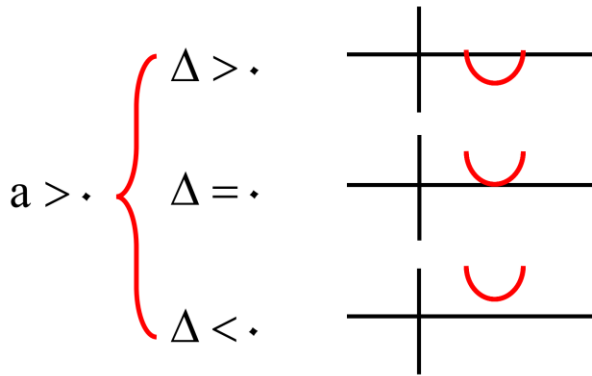
کنکور سراسری

یاد آوری محاسبه ی ریشه های (صفر های) معادله ی درجه دو

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



تکنیک فوق خفن

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

← b نداره

$$x^2 - 4x = 0$$

← c نداره

روش تغییر متغیر (t گیری)

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$$

الف (توان 4)

$$x^4 + 3x^2 + 2 = 0$$

ب (تکراری)

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 2 = 0$$

روابط بین ریشه های معادله ی درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\alpha + \beta = S = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha \times \beta = P = \frac{c}{a}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال : در معادله ی $x^2 + 5x - 1 = 0$ مجموع ریشه ها

حاصل ضرب ریشه ها

ترکیبی کار راه انداز

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

← مجموع مجذورات ریشه ها

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

← مجموع مکعبات ریشه ها

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

← مجموع جذر ریشه ها

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

← |تفاضل جذر ریشه ها|

مثال

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشد مقدار $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$ را بیابید :

مثال

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشد مقدار عبارت زیر را بیابید: (سمی)

$$(2\alpha^3 - \alpha)(2\beta^3 - \beta) =$$

تشکیل معادله ی درجه دوم با داشتن ریشه ها

$$\alpha \quad \beta$$

$$S = \alpha + \beta$$

$$P = \alpha \times \beta$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: معادله ی درجه دومی تشکیل دهید ک ریشه های آن $5 + \sqrt{3}$ و $5 - \sqrt{3}$ باشد:

مثال:

معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مجذور ریشه های معادله ی درجه دوم

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ باشد.}$$

مثال :

طول و عرض مستطیلی به مساحت ۶ و محیط ۱۰ را بیابید :

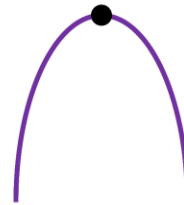
ماکزیم و مینیم سهمی (کمترین و بیشترین) :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



$$S \left| \begin{array}{c} \frac{-b}{2a} \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a} \end{array} \right.$$

نکته : خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی می باشد .

مثال

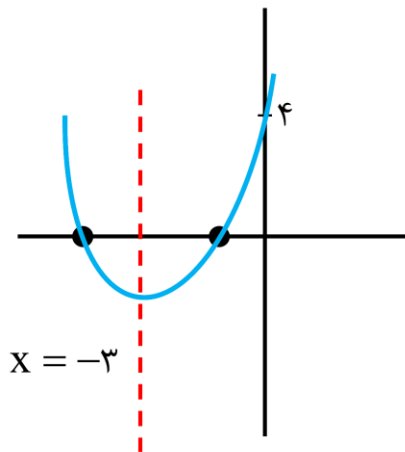
$$y = x^2 - 4x + 9$$

ماکزیم و مینیم سهمی زیر را بیابید :

مثال

کمترین مقدار سهمی به معادله $y = mx^2 + 4x + m$ برابر -3 می باشد ، m کدام است ؟ (سَمی)

نوشتن معادله ی سهمی به کمک نمودار



اگر های ریشه

اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد آنگاه

اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد آنگاه

اگر $\frac{c}{a} > 0$ باشد و $\frac{-b}{a} > 0$ باشد آنگاه

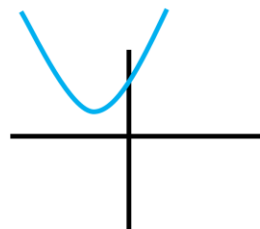
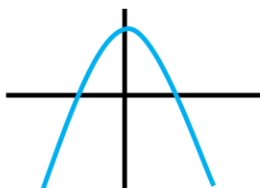
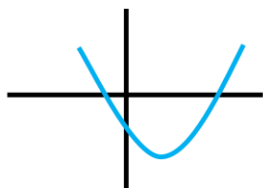
اگر $\frac{c}{a} > 0$ باشد و $\frac{-b}{a} > 0$ باشد آنگاه

مثال

اگر $y = 2x^2 + 4x + m - 2$ دو صفر با علامت منفی داشته باشد حدود m را بیابید :

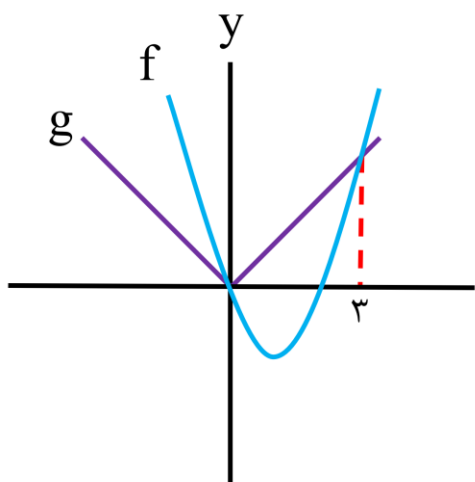
مثال

علامت های a و b و c را تعیین کنید :



مثال

به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید .



معادله های گویا

$$\frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-x}$$

معادله های گویا

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

معادله های رادیکالی (گنگ)

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

مثال

کدام یک از گزینه های زیر ریشه ی عبارت $\sqrt{2X-1}-3=4$ می باشد ؟

۴ (۴)

۲۵ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

مثال

تنها ریشه ی $X - \sqrt{X+1} = 1$ کدام است ؟

۰ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

-۱ (۱)

مثال

اگر $X = 4$ یکی از جواب های معادله ی $X + a = \sqrt{5X - X^2}$ باشد جواب دیگر آن کدام

است ؟

ندارد (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

قوانین قدر مطلق

$$|u| = K$$

$$|x - 1| = 3$$

$$|u| > K$$

$$|u| < K$$

مثال

نامعادله های قدر مطلقى زیر را رسم کنید :

$$|x^2 - 1| \geq 3$$

$$|x - 1| \leq 3$$

مثال

مجموعه جواب نامعادله $|x - 2| < x^2 - 2x$ ، به صورت کدام بازه است ؟

$$(1, 2) \text{ (۴)}$$

$$(0, 2) \text{ (۳)}$$

$$(-1, 2) \text{ (۲)}$$

$$(-1, 1) \text{ (۱)}$$

رسم توابع قدر مطلقى

1 همون هميشگى

$$y = |x^2 - 1|$$

2 درجه دوم ← رسم درجه ۲ ← تا کردن

$$y = |x - 1| + 2$$

3 نه شماره 1 نه شماره 2 ← تبديل به چند ضابطه اى

$$y = |x - 1| + |x - 2|$$

تذكر sis :

معادله ی خط :

$$y = mx + h \rightarrow \begin{array}{l} \text{شیب خط} = m \\ \text{عرض از مبدأ} = h \end{array}$$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \text{شیب خط} = -\frac{a}{b} \\ \text{عرض از مبدأ} = -\frac{c}{b} \end{array}$$

$$4x + 2y + 8 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{شیب خط} = \\ \text{عرض از مبدأ} = \\ \text{طول از مبدأ} = \end{array} \right.$$

نوشتن معادله ی خط با داشتن دو نقطه :

$$A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$$

$$y = mx + h$$

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال ۱ :

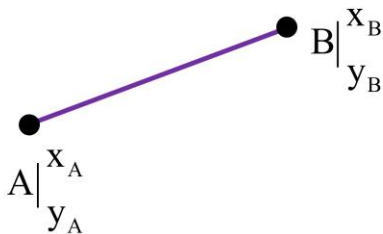
معادله ی خط گذرنده از دو نقطه $A(۳, -۱)$ و $B(-۲, ۴)$ را بنویسید .

نکات !!

اگر دو خط با هم موازی باشند

اگر دو خط برهم عمود باشند

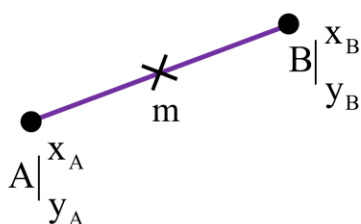
فاصله ی نقطه از خط :



$$|AB| = d = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

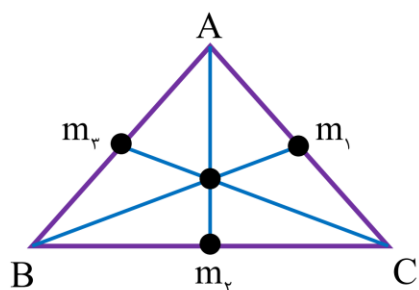
مثال :

مساحت دایره ای که نقاط $A(-۳, ۵)$ و $B(۲, ۱)$ دوسر قطر آن باشد کدام است ؟



$$m \left| \begin{array}{c} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right.$$

مختصات نقطه ی وسط پاره خط :



$$G \left| \begin{array}{c} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{array} \right.$$

مختصات نقطه ی وسط سه نقطه :

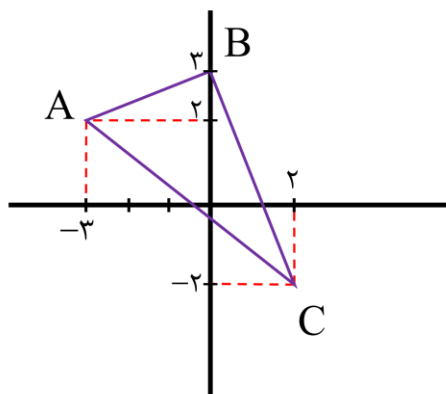
مرکز ثقل مثلث محل برخورد میانه ها است .

مثال

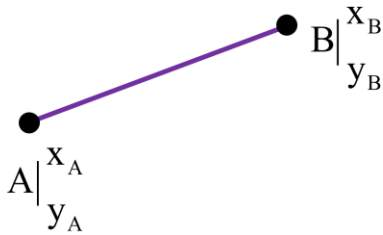
معادله ی خط گذرنده از نقطه ی $p(2, -1)$ را بنویسید به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد .

مثال

در شکل مقابل معادله ی ارتفاع BH را بنویسید .



فاصله ی نقطه از خط :



$$|AB| = d = \sqrt{\Delta^x + \Delta^y} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال :

مساحت دایره ای که نقاط $A(-3, 5)$ و $B(2, 1)$ دوسر قطر آن باشد کدام است ؟

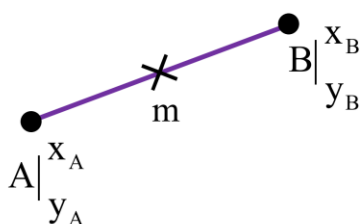
مثال

نقاط $A(2, 0)$ و $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر بگیرید :

الف) محیط مثلث ABC را بیابید ؟

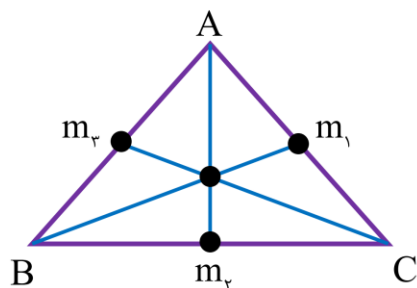
ب) ABC چه نوع مثلثی است ؟

پ) مساحت مثلث ABC را بیابید ؟



$$m \left| \begin{array}{c} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right.$$

مختصات نقطه ی وسط پاره خط :



$$G \left| \begin{array}{c} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{array} \right.$$

مختصات نقطه ی وسط سه نقطه :

مرکز ثقل مثلث محل برخورد میانه ها است .

مثال

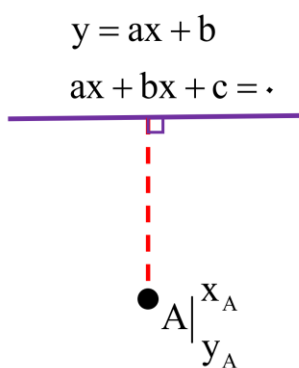
مثلث بارئوس $A(۱,۹)$ و $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید :

الف) مختصات M نقطه ی وسط BC را بیابید ؟

ب) طول AM را محاسبه کنید ؟

پ) معادله ی میانه ی AM را بنویسید ؟

فاصله ی یک نقطه از خط :



$$d = \frac{|a(...) + b(...) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

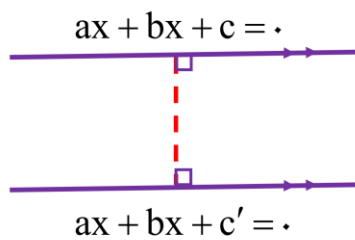
مثال :

خط $3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $O(2, -1)$ مماس باشد ، شعاع دایره کدام است ؟

مثال :

یکی از اضلاع مربع بر خط $y = 2x - 1$ واقع است ، اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد مساحت مربع را بیابید .

فاصله ی دو خط موازی از هم :



$$|HH'| = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال :

فاصله ی دو خط به معادله های $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ را بیابید :

در صورت موازی بودن می توان محاسبه کرد !!!

یک پله بالاتر

معادله ی خطی که با دو خط $ax + bx + c = 0$ و $ax + bx + c' = 0$ موازی باشد و از آنها نیز به فاصله ی برابر باشد :

$ax + bx + c = 0$

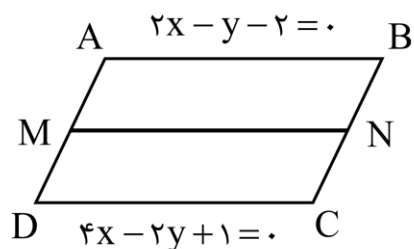
Δ

$ax + bx + c' = 0$

$$\Delta : ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

مثال :

معادله ی خط MN را بیابید .



فصل دوم

دامنه :

مقادیر مجاز برای x ها .

عبارات غیر کسری :

عبارات کسری :

عبارات رادیکالی :

$$3x^2 - 6x + 7$$

$$5x + 7$$

$$\frac{3x - 6}{x^2 + 36}$$

$$\frac{3x - 6}{x^2 - 36}$$

$$\sqrt[3]{3x^2 - 6x + 7}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3x^2 - 6}{x^2 - 36}}$$

فرجه فرد

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

ص :

فرجه زوج

$$\frac{6x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 7}}$$

م :

یادآوری تعیین علامت :

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$x^2 + 3x + 2$				
x^2				
$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$				

نکته : همواره $+$ را نذار

مثال ۱ :

دامنه را بیابید :

$$y = \sqrt{x^3 - 25x}$$

نامعادله ی درجه ۲ :

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

بدون تعیین علامت های درجه ۲ :

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

مثال ۲ :

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{4x - 1}{x^2 - 3x}$$

دخالت نکن :

$$y = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)}$$

مثال ۳ :

دامنه را بیابید :

$$y = \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$$

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

نامعادله های کسری :

نمونه سوالات امتحانی : مثال ۱

اگر $f(x) = \frac{x-7}{x^2+ax+b-1}$ دامنه اش $R - \{2\}$ باشد a و b را حساب کنید .

مثال ۲ :

اگر $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}$ دامنه اش $f(2x-4)$ باشد را حساب کنید .

$$f(2x-4) = \frac{2(2x-4)+1}{4(2x-4)-1} = \frac{4x-7}{8x-17} \Rightarrow 8x-17 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{17}{8}$$

$$D_{f(2x-4)} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{17}{8} \right\}$$

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g را برابر گوئیم ، هرگاه :

اولاً

ثانیاً

مثلاً توابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ و $g(x) = x-1$ با هم مساوی نیستند ، چون

مثال ۱ :

در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند ؟

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, g(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{(الف)}$$

$$f(x) = x-2, g(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \quad \text{(ب)}$$

مثال ۲ :

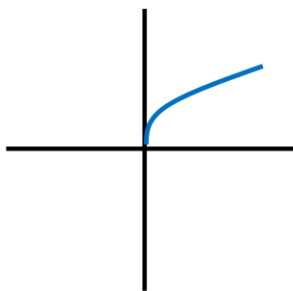
آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2-x}$ باهم مساوی اند ؟ چرا ؟

$$D_f : x \geq 0 \cap x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

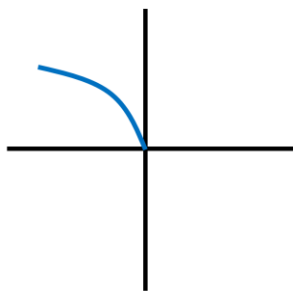
$$D_g = x^2 - x \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

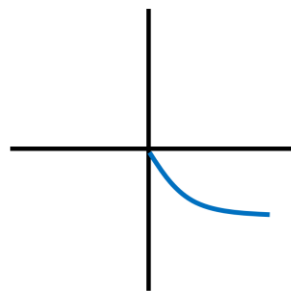
توابع رادیکالی



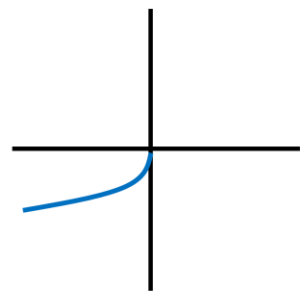
$$y = \sqrt{x}$$



$$y = \sqrt{-x}$$



$$y = -\sqrt{x}$$



$$y = -\sqrt{-x}$$

رسم

$$y = \sqrt{x+1}$$

$$y = \sqrt{x} + 1$$

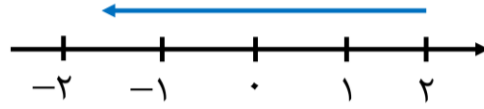
$$y = \sqrt{x-1} + 2$$

$$y = \sqrt{-x-1}$$

$$y = 2 - \sqrt{x+1}$$

براکت ((جزء صحیح)) :

$$y = [x]$$



$$[1, 5] =$$

$$[0.9] =$$

$$[1, 1] =$$

$$[0.1] =$$

$$[-1, 5] =$$

$$[-0.1] =$$

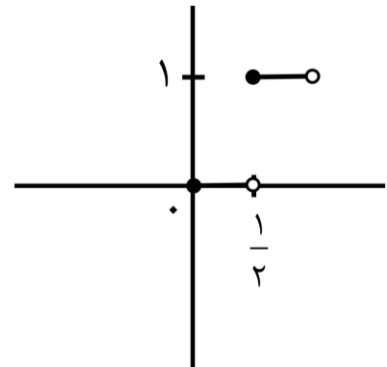
$$[-1, 1] =$$

$$[-0.9] =$$

رسم :

$$y = [2x] : [0, 1)$$

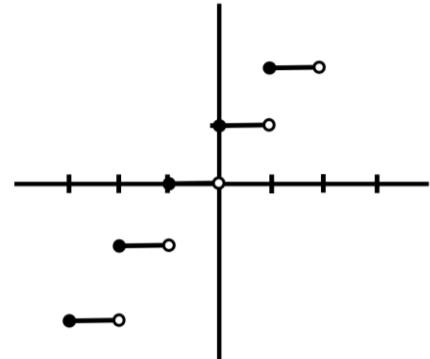
x	$2x$	$[2x]$
$0 \leq x < \frac{1}{2}$	$0 \leq 2x < \frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2} \leq x < 1$	$1 \leq 2x < 2$	1



رسم :

$$f(x) = [x] + 1 : [-3, 2]$$

	$[x]$	
$-3 \leq x < -2$	-3	-2
$-2 \leq x < -1$	-2	-1
$-1 \leq x < 0$	-1	0
$0 \leq x < 1$	0	1
$1 \leq x < 2$	1	2
2	2	3



مثال :

نمودار تابع $y = \frac{x}{[2x]}$ در بازه $[-1, 1]$ از چند قسمت تشکیل شده است ؟

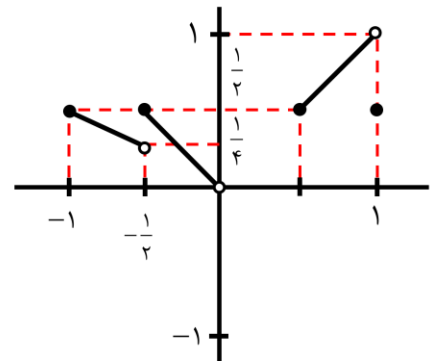
$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1 \Rightarrow y = -x$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{0}$$

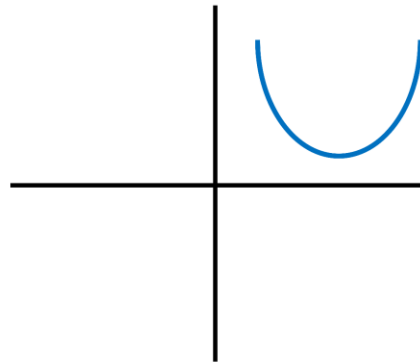
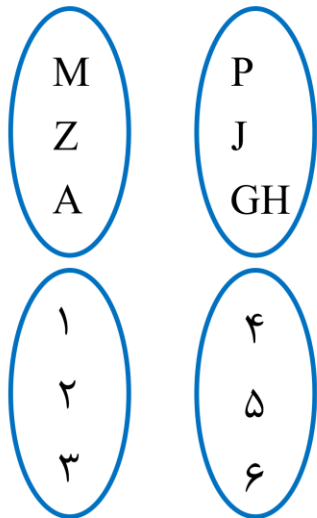
$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow y = x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{نقطه } (1, \frac{1}{2})$$



همان طور که میبینیم نمودار از ۳ پاره خط و یک نقطه یعنی ۴ قسمت تشکیل شده است .

یک به یک :



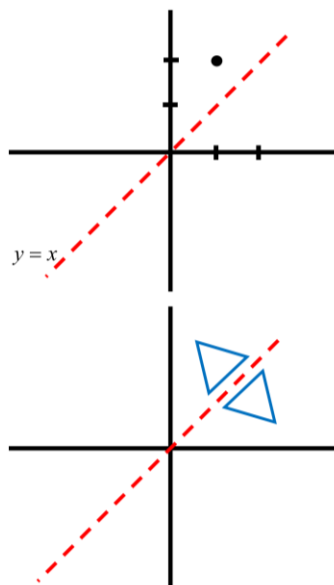
$\{(\dots\dots\dots), (\dots\dots\dots), (\dots\dots\dots)\}$

بررسی یک به یکی از روی ضابطه

$$y = 2x + 1$$

$$y = \frac{x + 2}{x - 3}$$

وارون یک نمودار



وارون توابع

$$y = \{(1,2)(3,4)\}$$

$$y^{-1} = \{(\cdots\cdots\cdots)(\cdots\cdots\cdots)\}$$

$$y = \{(1,5)(3,5)\}$$

$$y^{-1} = \{(\cdots\cdots\cdots)(\cdots\cdots\cdots)\}$$

شرط وارون پذیری :

مثال

وارون کنید .

$$y = 2x + 1$$

$$y = \frac{x+2}{x-3}$$

اعمال جبری :

$$f(x) = 3x + 8$$

$$g(x) = \frac{x-1}{2x+4}$$

$$D_{f+g}$$

$$D_{f-g}$$

$$D_{f \times g}$$

$$D_{\frac{f}{g}}$$

مثال :

$$f = \{(1, 2)(3, 5)(4, -6)\}$$

$$g = \{(1, 3)(3, 4)(4, 0)(2, 5)\}$$

$$f + g =$$

$$f - g =$$

$$f \times g =$$

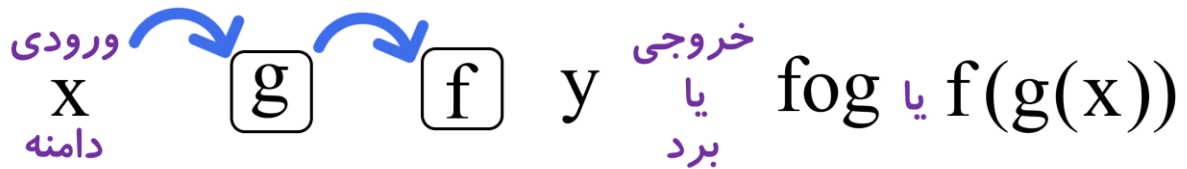
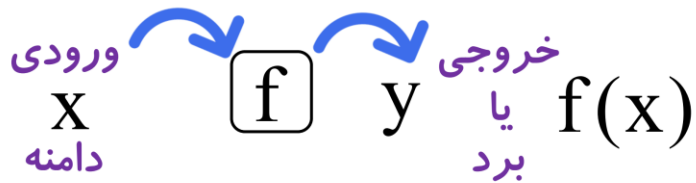
$$\frac{f}{g} =$$

$$2f =$$

$$f^2 =$$

$$\frac{2f - g}{g^2 + 1} =$$

ترکیب توابع :



تمرین :

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = 3x + 2$$

$$f(1) =$$

$$g(1) =$$

$$fog(1) =$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = 3x + 4$$

$$fog(x) =$$

$$gof(x) =$$

$$fof(x) =$$

تمرین :

$$fog(x) = 6x + 9$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) =$$

$$fog(x) = 6x + 9$$

$$g(x) = 3x + 4$$

$$f(x) =$$

مثال ۱ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases} \text{ اگر مقدار } f(-f(x)) \text{ را بیابید.}$$

$$(x^2 + 1)^2 + 1 \quad (۴)$$

$$x^2 + 1 \quad (۳)$$

$$x + 1 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

مثال ۲ :

اگر $g(x) = \frac{2x}{x+1}$ و $f \circ g(x) = 3x$ باشد ، ضابطه ی تابع f را بنویسید .

مثال ۳ :

اگر $f(x+2) = \frac{x}{4}$ و $g(\sqrt{x}+1) = 8x$ باشد ، مقدار $f \circ g(3)$ را بیابید .

ترکیب توابع از روی زوج مرتب

$$f(x) = \{(1, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 6)\}$$

$$g(x) = \{(1, 1), (3, 4), (6, 5)\}$$

$$f \circ g(x) =$$

$$g \circ f(x) =$$

$$(f + g)(x) =$$

مثال :

اگر $f = \{(1, 4), (3, a), (2, 5)\}$ و $g = \{(4, a), (-1, 5)\}$ باشند و $\text{gof} = \{(1, 2), (3, 5)\}$ باشد ، حاصل $a + b$ را بیابید .

دامنه ی ترکیب توابع بدون ساختن تابع ترکیبی :

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

تمرین :

$$f(x) = \sqrt{x - 5}$$

$$g(x) = x^2 - 4$$

$$D_{\text{fog}} =$$

تمرین :

در تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$ را در نظر بگیرید :

الف) دامنه تابع $g \circ f$ را بدون تشکیل $g \circ f(x)$ به دست آورید :

ب) ضابطه $f \circ g$ را به دست آورید :

مثال :

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2)(5, 4)(6, 5)(2, 3)\}$ مقدار $g(f(a)) = 5$ عدد a کدام است ؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

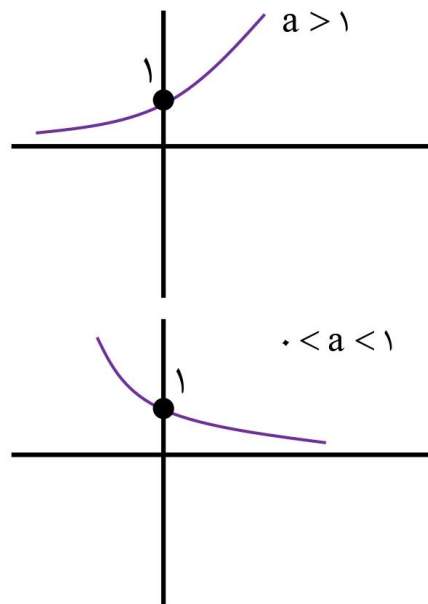
۱ (۱)

کنکور سراسری

تابع نمایی :

$$y = a^x \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = 2^x \\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \end{matrix}$$

$D: \mathbb{R} \quad R: (0, +\infty)$



تمرین :

کدام گزاره صحیح است ؟

الف) نقطه ی $\left(\frac{1}{5}, \sqrt{5}\right)$ روی نمودار تابع با ضابطه ی $y = 5^x$ قرار دارد .

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه ی $y = 10^x$ با محور y ها ، نقطه ی $(0, 10)$ است .

پ) دامنه ی توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند .

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه ی $y = e^x$ با محور x ها ، نقطه ی (e, e) است .

یادآوری توان ها :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

معادلات نمایی :

$$3^{2x-3} = 81$$

$$(125)^{x+1} = 5^{2x-1}$$

$$2^{n-2} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{128}\right)$$

$$5 \times 3^{2x} - 3^x = 4 \quad (\text{سمی})$$

لگاریتم :

$$\log_b^a = c$$

$$y = a^x \Leftrightarrow y^{-1} = \log_a^x$$

$$\log_{\delta}^{\gamma\delta} = \gamma \rightarrow$$

$$\log^{\gamma\delta} = \gamma \rightarrow$$

دامنه ی لگاریتم :

$$\log_b^a$$

ویژگی های لگاریتم :

$$\log_a^1 = 0$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a \rightarrow \log_{\gamma\delta}^{\frac{1}{\gamma\delta}} =$$

$$\log_c^a + \log_c^b \Leftrightarrow \log_c^{ab} \rightarrow \log^x + \log^{\gamma x} =$$

$$\log_c^a - \log_c^b \Leftrightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} \rightarrow \log^{\wedge} - \log^{\gamma} =$$

$$\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$$

تمرین ۱ :

جملات زیر را تکمیل کنید :

الف) دامنه ی تابع با ضابطه ی $y = \log_a^x$ ($a > 1$) ، مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت و برد آن است.

ب) دامنه ی تابع با ضابطه ی $y = \log_a^x$ ($0 < a < 1$) ، بازه ی و برد آن است .

پ) نمودار توابع فوق ، محور x ها را در نقطه ی قطع می کند و محور y ها را قطع نمی کند .

ت) این دو تابع ، یک به یک زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار آنها را حداکثر در نقطه قطع می کند .

ث) وارون تابع نمایی ، تابع است و وارون تابع لگاریتمی ، تابع است .

تمرین ۲ :

$$\log_5^x = 3$$

$$\log_7^{(2x+1)} = 3$$

$$\log_3^{(x-1)} = 4$$

$$2 \log_4^{(x-1)} = 3$$

تمرین ۳ :

$$\log_r^{(x+1)} + \log_r^{(x+4)} = 2$$

$$\log(2x) - \log(x - 3) = 1$$

تمرین ۴ :

$$\log_r^{(p^r - r)} = \log_r^p$$

$$\log_\delta^{(x+1)} + \log_\delta^{(x-1)} = 1$$

تمرین ۵ :

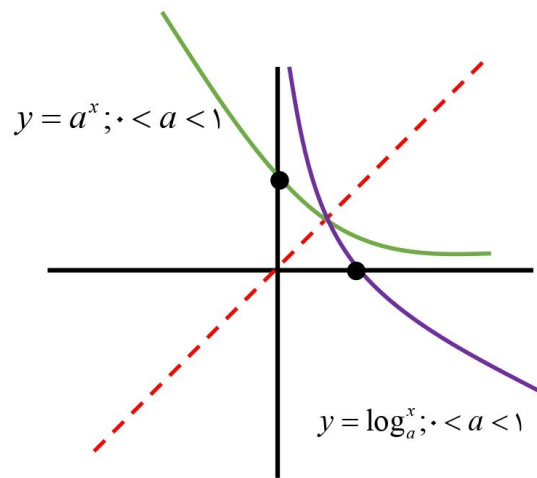
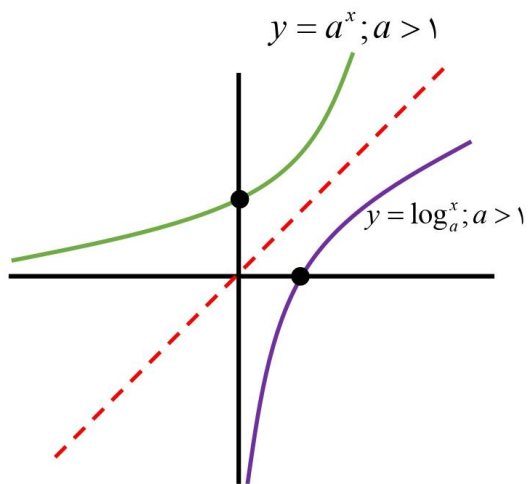
$$3 \log_{\frac{a}{f}} - \log_{\frac{5}{f}} = \log_{\frac{25}{f}}$$

$$\log_{\frac{1}{10}}^{(x^2-21)} = -2$$

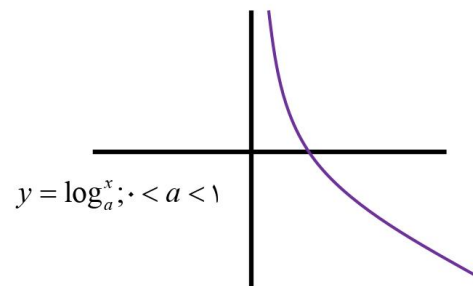
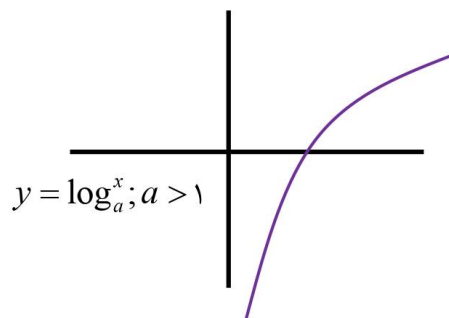
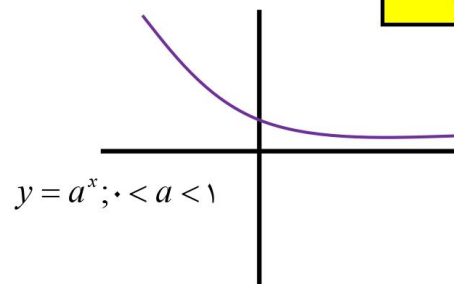
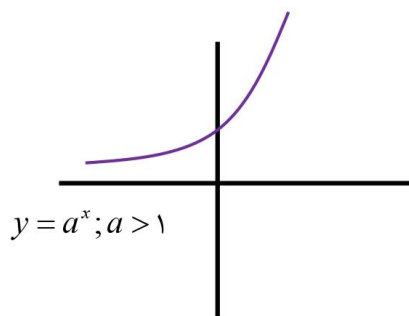
تمرین ۶ :

از معادله ی لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ی ۴، کدام است ؟

نمودار :



نمودار :



تمرین ۱ : رسم

$$y = r^x + ۱$$

$$y = r^{x+۱}$$

تمرین ۲ : رسم

$$y = \log_r^x - ۱$$

$$y = \log_r^{x-۱}$$

تمرین ۳ : رسم

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = -2^x + 1$$

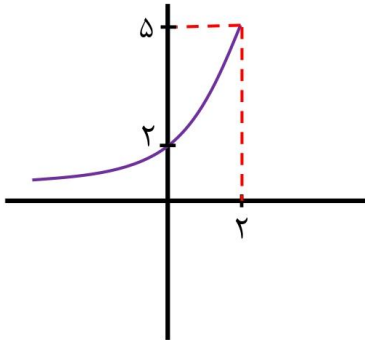
تمرین ۴ : رسم

$$y = -2^x + 1$$

$$y = 2^{|x|}$$

تمرین ۵ :

در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطه ی $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است . a و b را به دست آورید :



تمرین ۶ :

فرض می کنیم $g(x) = 4^x + 2$.

الف) $g(-1)$ را به دست آورید .

ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است ؟

تمرین ۷ :

نمودار تابع با ضابطه ی $y = 4^x - 1$ را در بازه ی $[-2, 2]$ رسم کنید .

محاسبه ی لگاریتم ذهنی :

$$\log_{\setminus}^x \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 8, 9 \end{cases}$$

$$\log 127 =$$

$$\log 24893 =$$

$$\log 5 =$$

$$\log ۸۵ =$$

$$\log ۳۵۶۷۸۹۱۰۰ / ۸۱ =$$

$$\log ۹۹۹۸۸۸۱۱۳۱۸ =$$

$$\log_{\frac{5}{3}} =$$

کاربرد لگاریتم :

روز پنجم دی ماه سال ۱۳۸۲ زلزله ای به شدت ۶/۶ ریشتر ، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند . مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است ؟

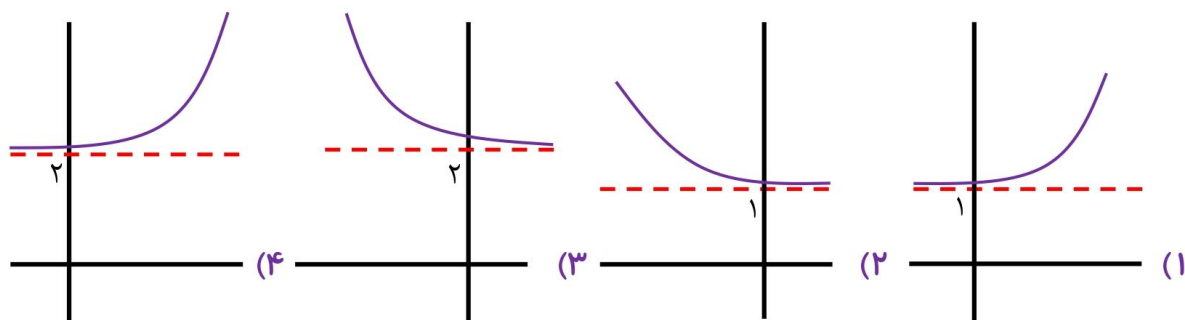
$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \rightarrow$$

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) \rightarrow$$

$$\log E ۲۱/۷ \rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷} \text{Erg}$$

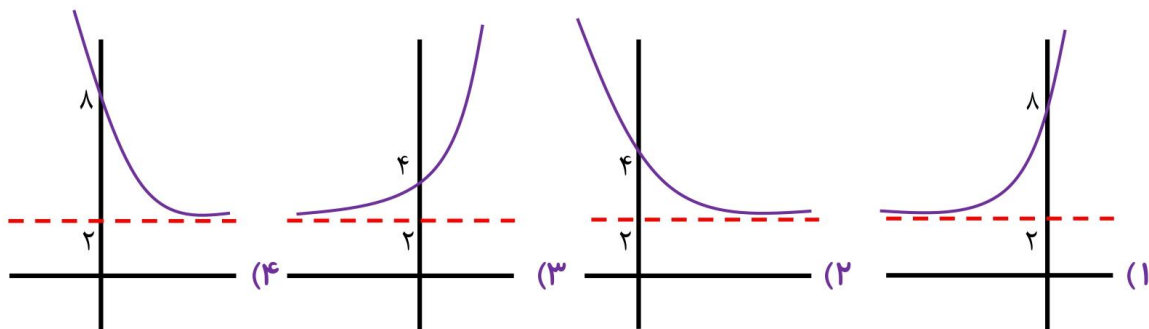
تمرین ۱ :

نمودار تابع $y = 3^{x-2} + 1$ کدام است ؟



تمرین ۲ :

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2^{1-x} + 2^{2-x} + 2$ کدام است ؟



تمرین ۳ :

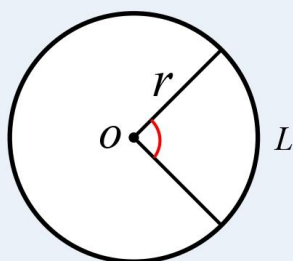
ضابطه ی وارون تابع $f(x) = \frac{1-3^x}{1+3^x}$ کدام است ؟

$$\log_r\left(\frac{-x-1}{x-1}\right) \text{ (۴)} \quad \log_r\left(\frac{x-1}{-x-1}\right) \text{ (۳)} \quad \log_r\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \text{ (۲)} \quad \log_r\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \text{ (۱)}$$

واحدهای اندازه گیری

درجه (D) : اندازه زاویه مرکزی رو به رو به کمانی در یک دایره است که طول آن کمان برابر محیط دایره باشد .

رادیان (R) : اندازه زاویه مرکزی رو به رو به کمانی در یک دایره است که طول کمان با شعاع دایره برابر باشد .



$$\alpha = \frac{L}{r}$$

در شکل مقابل اندازه زاویه α برحسب رادیان برابر است با :

تبدیل رادیان به درجه :

$$\frac{\pi}{180} =$$

$$\frac{\pi}{180} =$$

تبدیل درجه به رادیان :

$$20^\circ =$$

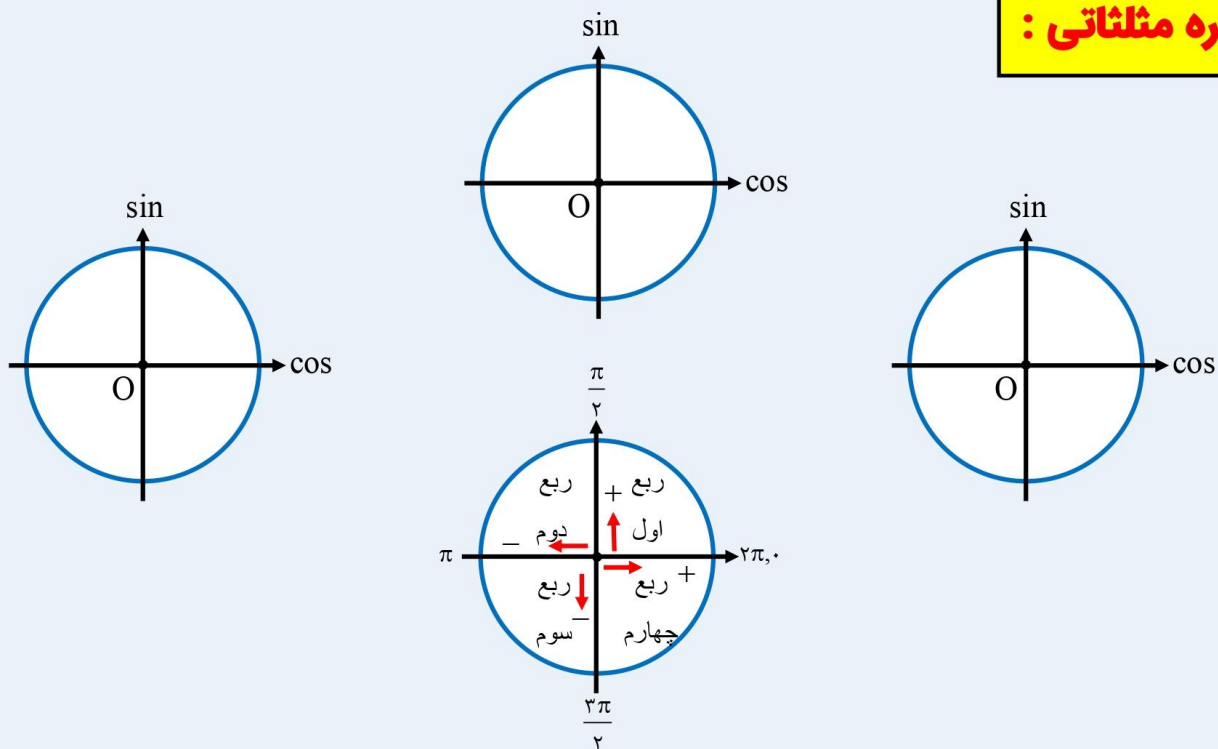
$$22 / 5^\circ =$$

تبدیل رادیان و درجه به هم :

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

توجه : یک رادیان برابر $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$ است .

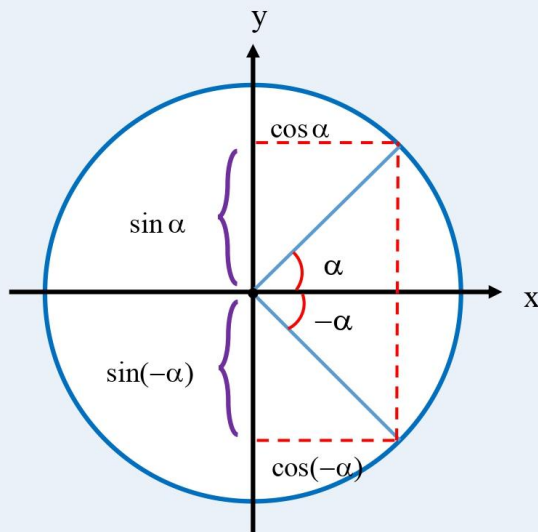
دایره مثلثاتی :



علامت نسبت های مثلثاتی در ناحیه های مختلف :

مقدار θ	ربع	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	اول	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	دوم	+	-	-	-
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	سوم	-	-	+	+
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	چهارم	-	+	-	-

نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه :



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

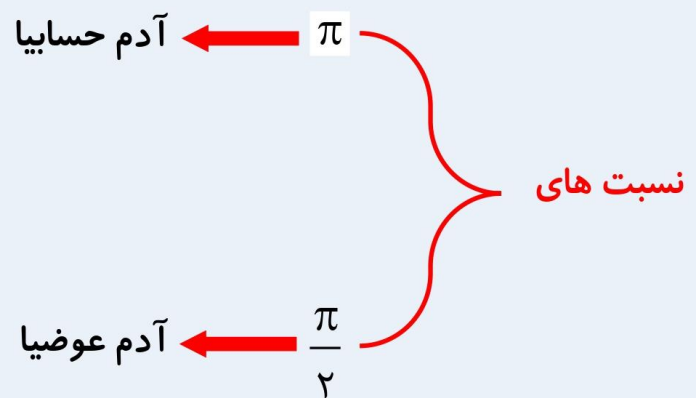
$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

جدول مثلثاتی :

زاویه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
کمان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(3\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = \cot \alpha$$

کاربرد :

$$\sin ۱۵۰ \longrightarrow$$

$$\sin ۱۲۰ \longrightarrow$$

$$\cos ۱۵۰ \longrightarrow$$

$$\tan ۲۲۵ \longrightarrow$$

مثال :

$$\sin\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{-۴۳\pi}{۳}\right) = \cos\left(\frac{۴۳\pi}{۳}\right) \longrightarrow$$

$$\tan\left(\frac{-۲۶\pi}{۳}\right) = -\tan\left(\frac{۲۶\pi}{۳}\right) \longrightarrow$$

اتحاد های مثلثاتی :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

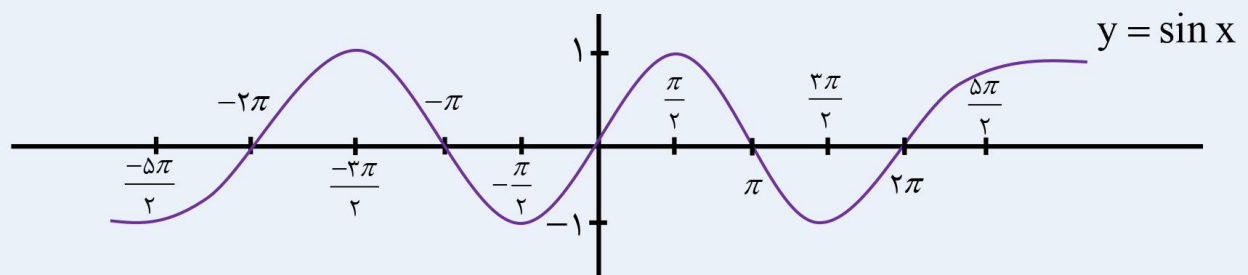
$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha$$



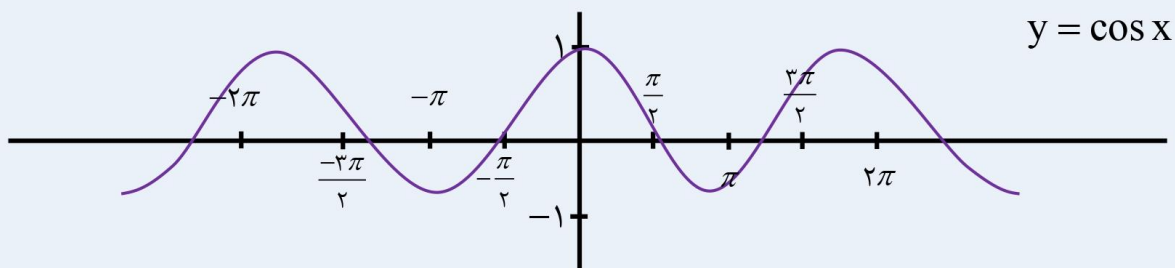
این تابع متناوب است و **دوره** تناوب آن $T = 2\pi$ است. یعنی نمودار تابع در بازه هایی به طول 2π عیناً تکرار می شود.

دامنه تابع $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) و برد تابع بازه $[-1, 1]$ است.

نمودار تابع در نقاط $x = K\pi; (K \in \mathbb{Z})$ با محور x ها برخورد دارد.

حداکثر مقدار تابع برابر 1 است که در نقاط به طول $x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}; K \in \mathbb{Z}$ به دست می آید.

حداقل مقدار تابع برابر -1 است که در نقاط به طول $x = 2K\pi + \frac{3\pi}{2}; K \in \mathbb{Z}$ به دست می آید.



این تابع متناوب است و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ است.

دامنه تابع R (مجموعه اعداد حقیقی) و برد تابع بازه $[-1, 1]$ است.

نمودار تابع در نقاط $x = K\pi + \frac{\pi}{2}; (K \in \mathbb{Z})$ با محور x ها برخورد دارد.

حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است که در نقاط به طول $x = 2K\pi; K \in \mathbb{Z}$ به دست می آید.

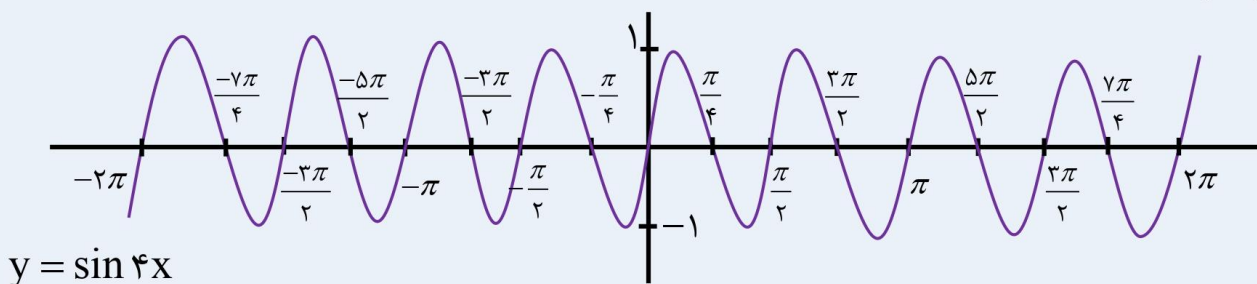
حداقل مقدار تابع برابر -۱ است که در نقاط به طول $x = 2K\pi + \pi; K \in \mathbb{Z}$ به دست می آید.

مثال :

نمودار تابع $y = \sin 4x$ را رسم کنید.

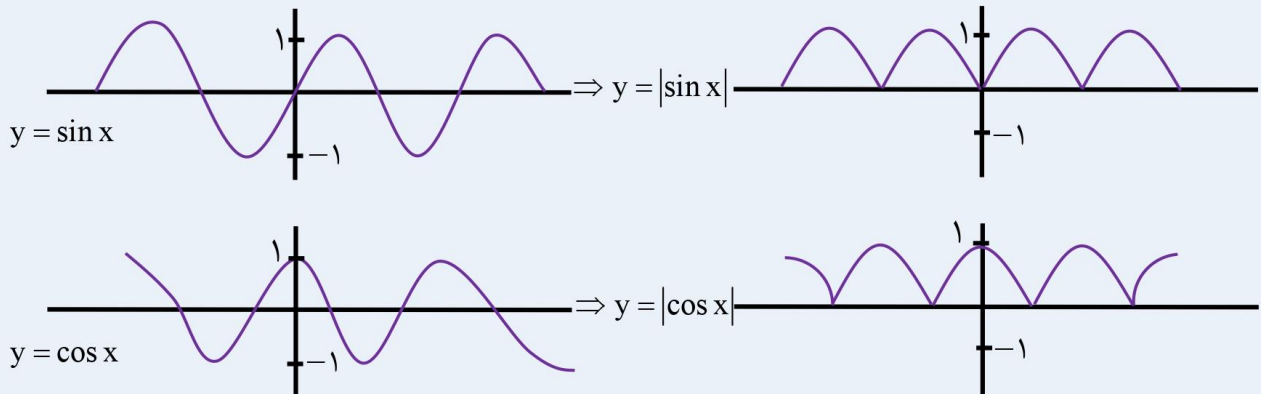
دوره تناوب این تابع $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ است. یعنی در بازه هایی به طول $\frac{\pi}{2}$ نمودار تابع عیناً تکرار

می شود.



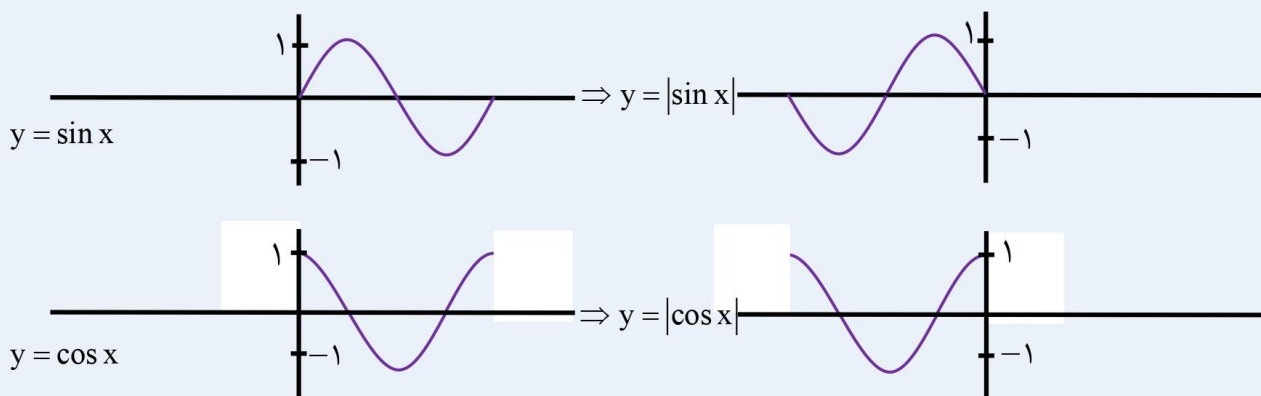
چند نکته برای رسم توابع سینوسی و کسینوسی

برای رسم نمودار تابع $y = |\sin x|$ و $y = |\cos x|$ کافی است ابتدا نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را رسم کرده سپس قسمت هایی از نمودار که پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

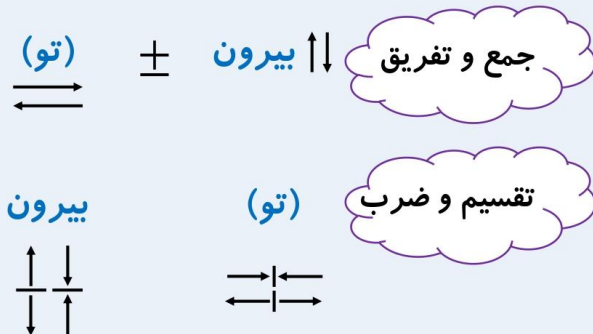


چند نکته برای رسم توابع سینوسی و کسینوسی

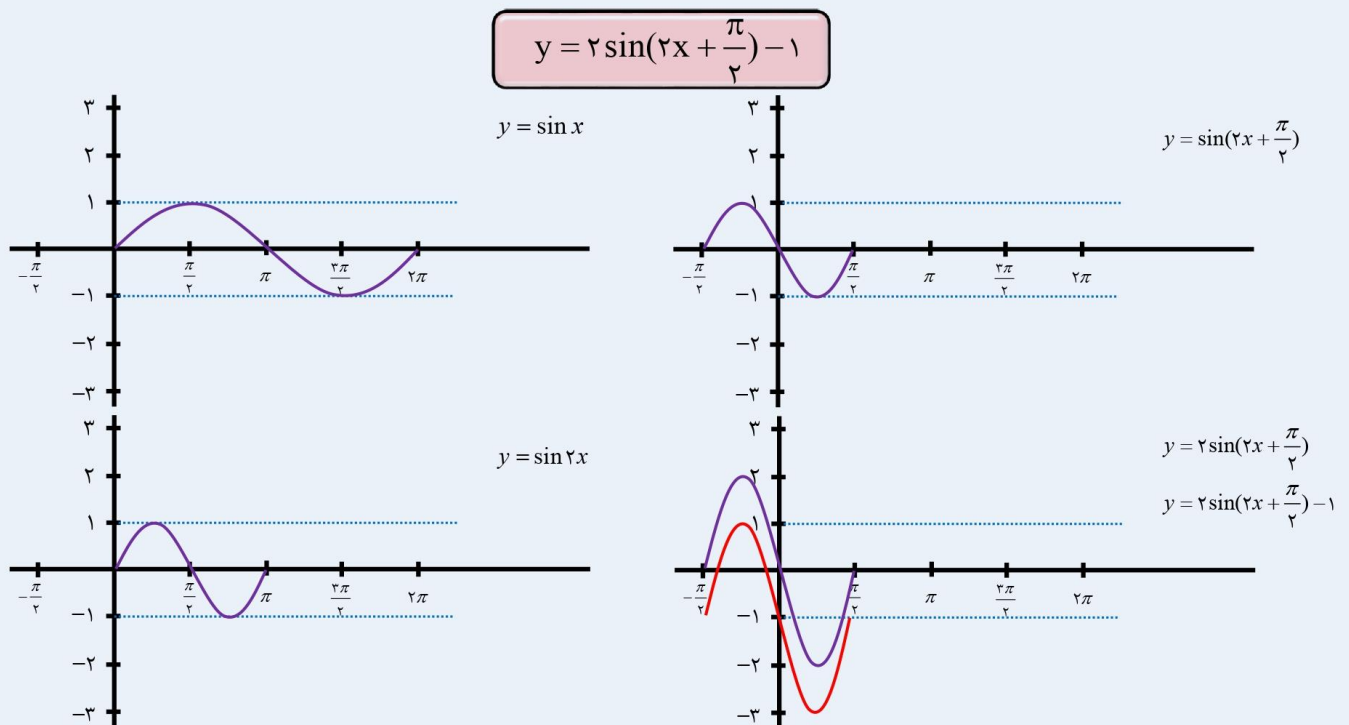
برای رسم نمودار تابع $y = |\sin x|$ و $y = |\cos x|$ کافی است ابتدا نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را رسم کرده سپس قسمت هایی از نمودار که پایین محور y ها قرار دارد را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.



رسم نمودار (انتقال محور) :



$$y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$



مثال :

کمترین مقدار توابع $y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ وقتی $x \in (0, 3)$ بیابید .

$$0 < x < 3 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2}x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) < 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) < 3$$

پس کمترین مقدار تابع برابر -۳ است .

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

مثال ۱ :

درستی $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$ را ثابت کنید

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{2} \sin \theta}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta}$$

مثال ۲ :

فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{3}$ و $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع

دوم باشد ، مطلوب است :

الف) $\sin(\alpha + \beta)$

ب) $\cos(\alpha + \beta)$

روابط مثلثاتی کمان 2α :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha - 1$$

مثال ۱ :

مطلوب است $\sin 22.5^\circ$ درجه :

مثال ۲ :

ثابت کنید :

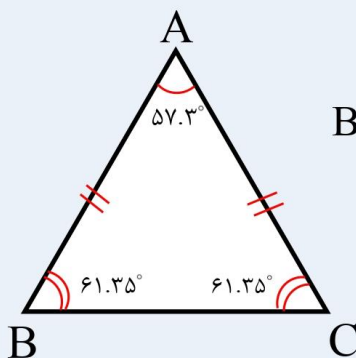
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

نمونه سوالات امتحانی : تمرین ۱

درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید .

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی α رادیان باشد ، آنگاه اندازه قاعده ی این مثلث کوچکتر از اندازه ی هریک از ساق های آن است .



$$B = C = \frac{180^\circ - 57.3^\circ}{2} = 61.35^\circ$$

می دانیم در هر مثلث ضلع رو به رو به زاویه ی بزرگتر، بزرگ از ضلع رو به رو به زاویه ی کوچکتر است پس طول قاعده کوچکتر از طول ساق ها خواهد بود ، پس عبارت فوق درست است .

ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان رو به روی زاویه π رادیان تقریباً برابر $۳/۱۴$ سانتی متر است .

این عبارت درست است زیرا :

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow L = r\alpha \Rightarrow L = 1 \times \pi = \pi \approx 3/14 \text{ cm}$$

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره ی مثلثاتی قرار دارد .

این عبارت نادرست است زیرا :

انتهای کمان زاویه ۲۱۶ درجه در ربع سوم است .

(ت) زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان ، $\frac{\pi}{9}$ رادیان ، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان ، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند .

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ \quad \frac{7\pi}{36} = 35^\circ \quad \frac{\pi}{9} = 35^\circ$$

این عبارت نادرست است زیرا :

$$120^\circ + 35^\circ + 35^\circ = 190^\circ > 180^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$

تمرین ۲ :

دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر مفروض است . اندازه ی مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی متر از این دایره چند رادیان است ؟

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10}$$

نکته : L و r هم واحد هستند و α بر حسب رادیان به دست می آید .

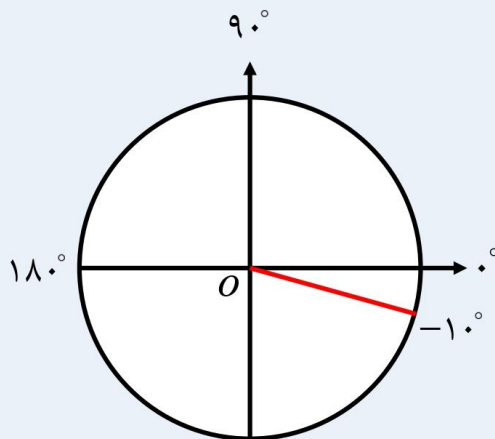
تمرین ۳ :

زاویه ی D برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است . اندازه ی این زاویه چند درجه است ؟

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{20} \Rightarrow D = 9^\circ$$

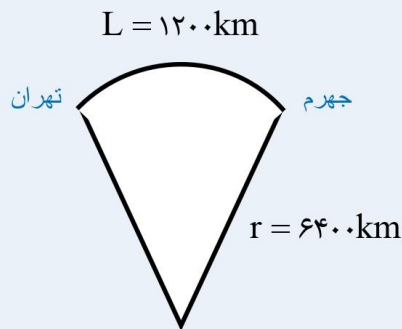
تمرین ۴ :

زاویه $\frac{-\pi}{18}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره ی مثلثاتی نشان دهید .



تمرین ۵ :

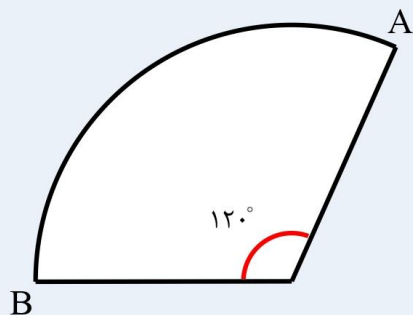
اگر فاصله جهرم تا تهران ۱۲۰۰ کیلومتر بر روی سطح زمین باشد ، زاویه مرکزی این دو شهر در مرکز کره ی زمین در صورتی که شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد را حساب کنید .
(زاویه بر حسب رادیان باشد) .



$$L = r\theta \Rightarrow 1200 = 6400 \cdot \theta \Rightarrow \theta = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

تمرین ۶ :

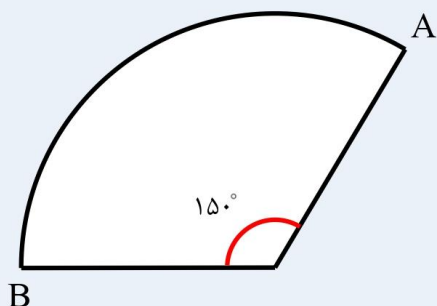
متحرکی از نقطه ی A روی دایره به نقطه ی B می رود . اگر شعاع دایره ۱۸ سانتی متر باشد ، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید .



$$\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{18} \Rightarrow L = 12\pi$$

تمرین ۷ :

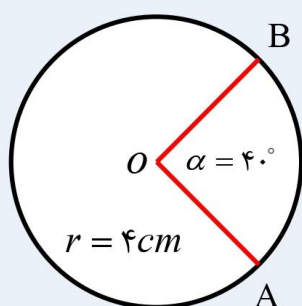
متحرکی از نقطه ی A روی دایره به نقطه ی B می رود . اگر شعاع دایره ۲۴ سانتی متر باشد ، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید .



$$\theta = 150^\circ \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{L}{24} \Rightarrow L = 20\pi$$

تمرین ۸ :

در شکل مقابل اندازه ی زاویه α را بر حسب رادیان به دست آورید ، سپس طول کمان AB را پیدا کنید .

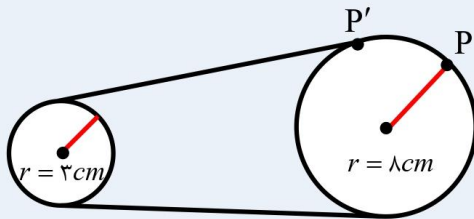


$$\frac{40}{\alpha} = \frac{180}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{AB}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{9} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AB = \frac{8\pi}{9} \text{ cm}$$

تمرین ۹ :

در شکل مقابل یک تسمه دو قرقره به شعاع های 8cm و 3cm را به هم وصل کرده است .
بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ تر $\frac{\pi}{3}$ رادیان می چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار
می گیرد) قرقره کوچک تر چند رادیان می چرخد ؟



در قرقره بزرگ تر داریم :

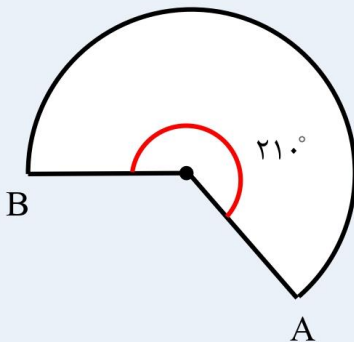
$$\theta = \frac{PP'}{r} \Rightarrow PP' = \frac{\pi}{3} \times 8 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل شده اند پس قرقره کوچک

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{8\pi}{3}}{3} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad} \quad \text{تر نیز } \frac{8\pi}{3} \text{ cm حرکت می کند بنابراین :}$$

تمرین ۱۰ :

متحرکی از نقطه A روی دایره به نقطه B می رود . اگر شعاع دایره 15 سانتی متر باشد ، مقدار
مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید .



$$\theta = 210^\circ \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = \frac{L}{15} \Rightarrow L = \frac{35\pi}{2}$$

تمرین ۱۱ :

بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی های زیر را بررسی کنید .

$$\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$$

$$\sin 84^\circ = \sin(5\pi - 6^\circ) = \sin 6^\circ$$

$$\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$$

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(2\pi - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

$$\tan(-100^\circ) = \tan 80^\circ$$

$$\tan(-100^\circ) = -\tan 100^\circ = -\tan(3\pi - 80^\circ) = -(-\tan 80^\circ) = \tan 80^\circ$$

$$\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$$

$$\sin 875^\circ = \sin(2\pi + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

تمرین ۱۲ :

حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$\sin\left(\frac{75\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{73\pi}{4}\right) = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$\frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{-4 - \sqrt{6}}{10}$$

تمرین ۱۳ :

اگر $\tan ۲۳^\circ = \alpha$ باشد ، حاصل $\frac{۳ \sin ۱۵۷^\circ + ۲ \cos ۱۱۳^\circ}{\sin ۲۹۳^\circ - \cos ۶۷^\circ}$ را بر حسب α بیابید .

$$\begin{aligned} & \frac{۳ \sin(\pi - ۲۳)^\circ + ۲ \cos(\frac{\pi}{۲} + ۲۳)^\circ}{\sin(\frac{۳\pi}{۲} + ۲۳)^\circ - \cos(\frac{\pi}{۲} - ۲۳)^\circ} = \frac{۳ \sin ۲۳^\circ - ۲ \sin ۲۳^\circ}{-\cos ۲۳^\circ - \sin ۲۳^\circ} = \frac{-\sin ۲۳^\circ}{\cos ۲۳^\circ + \sin ۲۳^\circ} \\ & = \frac{-\tan ۲۳^\circ}{۱ + \tan ۲۳^\circ} = \frac{-\alpha}{۱ + \alpha} \end{aligned}$$

فصل پنجم

همسایگی :

همسایگی متقارن :

همسایگی محذوف :

همسایگی محذوف متقارن :

شعاع و مرکز همسایگی :

مثال :

به ازای کدام مجموعه مقادیر X ، بازه ی $(x + 1, 2x - 1)$ یک همسایگی عدد 3 ، می باشد ؟

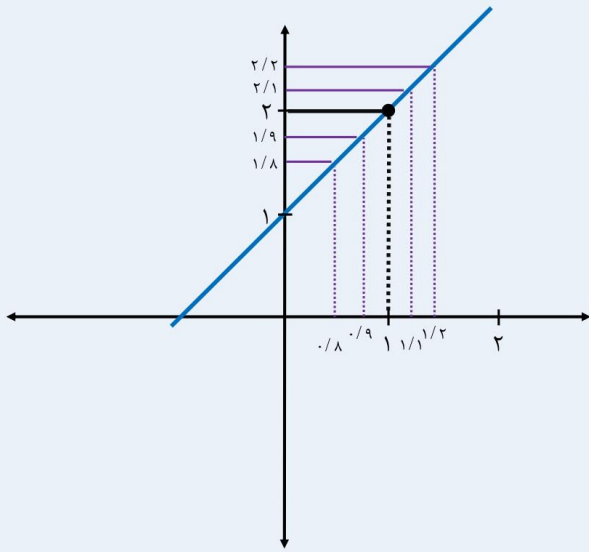
$$1/5 < x < 2 \quad (4)$$

$$2 < x < 2/5 \quad (3)$$

$$\{2\} \quad (2)$$

$$\emptyset \quad (1)$$

مفهوم حد :

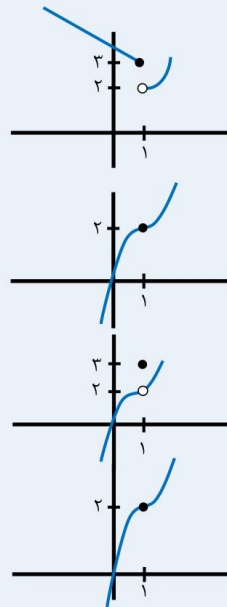


$$4m \rightarrow 2m \rightarrow 1m \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$$

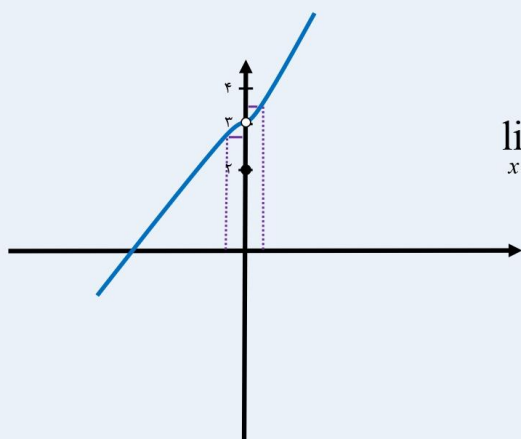
x	$\cdot/8$	$\cdot/9$	1	$1/1$	$1/2$
$f(x) = x + 1$	$1/8$	$1/9$	2	$2/1$	$2/2$

x	$\cdot/8$	$\cdot/9$	1	$1/1$	$1/2$
$f(x) = x + 1$	$1/8$	$1/9$	2	$2/1$	$2/2$

مفهوم حد :



مفهوم حد :



$$\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow \cdot^-} f(x) = \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) =$$

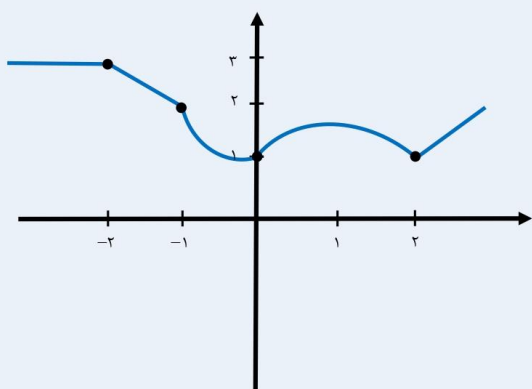
$$f(\cdot) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} [f(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} [f(x)] =$$

یادآوری براکت :

مفهوم حد :



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x+1) = f(2^+) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{-x}{2}\right) = f(-1^-) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} = f(x-1) = f(-2^-) =$$

$$1^+ : 1 + 0 / 1 = 1 / 1$$

$$1^- : 1 - 0 / 1 = 0 / 1$$

$$-1^+ : -1 + 0 / 1 = -0 / 1$$

$$-1^- : -1 - 0 / 1 = -1 / 1$$

تکنیک دهم بازی کوچولو :

روش حل سوالات حد

حد که دیدی عدد بده ← براکت ← ب ← قدر ← ق
 دوباره عدد ← [z] ← ر ← رادیکال
 √.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} |x - 3| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x - 2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x + 1] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0/\delta} [x + 1] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 1}{3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x - 1} =$$

انتظار ما :

عدد
 جواب
 رفع ابهام
 ☺

جبری : الف و ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 3 =$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} =$$

عامل ابھام :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

یادآوری اتحاد مزدوج

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

جبری : ب و پ)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} =$$

یادآوری اتحاد جمله مشترک :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1} =$$

تقسیم سریع به روش هورنر :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & +4 & -1 \\ \hline X-1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

ضعف هورنر :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline X+1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

نکته هورنر :

رادیکالی :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} =$$

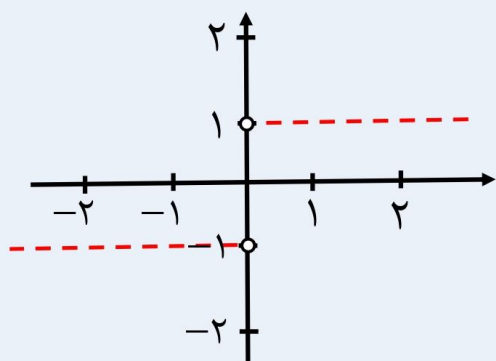
$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{8x} - 8} \times \text{---} \times \text{---} =$$

یادآوری چاق و لاغر

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

تمرین ۱:

اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟



$$f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{-x}{x}, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

تمرین ۲ :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

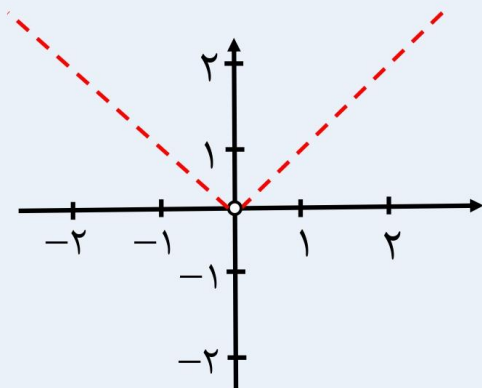
آیا حد تابع مقابل در $x = 2$ موجود است ؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 2 = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow f(2) = -2$$

تمرین ۳ :

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می گیریم . آیا f در نقطه ی صفر حد دارد ؟

آیا $f(0)$ موجود است ؟



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

تمرین ۴ :

درباره ی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

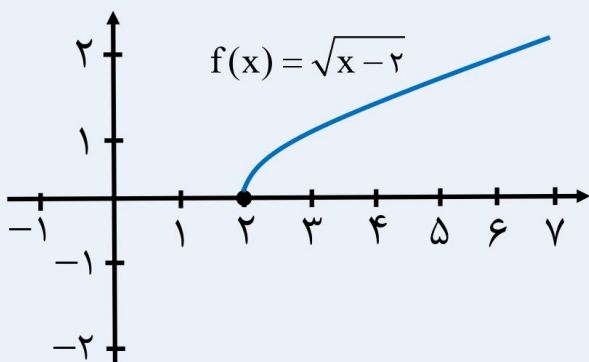
ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت) $f(2)$

پاسخ

درباره ی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد

ت) $f(2) = \sqrt{2-2} = 0$

تمرین ۵ :

آیا تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در $x = 0$ حد دارد؟ آیا می شود داشته باشد؟

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

تمرین ۶ :

تابع با ضابطه ی $f(x) = a[x] + [x + 1]$ مفروض است . مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow x} f(x)$ موجود است .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + [x + 1]) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[x] + [x + 1]) = a + 1 = 1$$

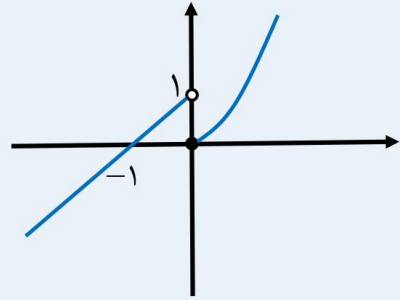
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

تمرین ۷ :

ابتدا نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید سپس با بررسی حدود چپ و راست ،

وجود حد تابع را در $x = 0$ بررسی کنید .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



تمرین ۸ :

مقداری a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 2$ دارای حد باشد .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 2 \\ \frac{ax}{x-3}, & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax}{x-3} = \frac{2a}{2-3} = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 6 = -2a \Rightarrow a = -3$$

تمرین ۹ :



مقادیر a و b را $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq -1 \\ ax^2 - 1, & x < -1 \end{cases}$ طوری تعیین نمایید که $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ گردد.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = a(-1) + b = -a + b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 - 1) = a(-1)^2 - 1 = a - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

تمرین ۱۰ :

بیابید :

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x + 7}{\sqrt{x + 1}} = \frac{8 + 7}{\sqrt{8 + 1}} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x]) = 2 + 2 = 4$$

تمرین ۱۱ :

بیابید :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-1} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x + \sin^2 x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \sin^2 x}{1 - \sin x} \\ &= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

تمرین ۱۲ :

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است ؟

تمرین ۱۳ :

مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ a + 2, & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(1) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2 \Rightarrow a + 2 = -2 \Rightarrow a = -4$$

تمرین ۱۴ :

مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2b}{x^2-2} & ; x > 2 \\ 2a+x+1 & ; x = 2 \\ 2b+5 & ; x < 2 \end{cases} \quad f(2) = 2a+2+1 = 2a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2b}{x^2-2} = \frac{2+2b}{2} = b+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b+5$$

$$\Rightarrow 2a+3 = b+1 = 2b+5 \Rightarrow b+1 = 2b+5 \Rightarrow b = -4$$

$$\Rightarrow 2a+3 = 2b+5 \Rightarrow 2a+3 = -3 \Rightarrow a = -3$$

تمرین ۱۵ :

اگر تابع f با ضابطه ی زیر در $x = 2$ پیوسته باشد ، مقادیر a و b را به دست آورید .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x > 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ b[x] - 3 & ; x < 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2b}{x^2 - 2} = \frac{2 + 2b}{2} = b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + ax = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} + ax = 4 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} b[x] - 3 = b - 3$$

$$b - 3 = 3 \Rightarrow b = 6$$

$$4 + 2a = 3 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تمرین ۱۶ :

مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر $x = 1$ پیوسته باشد .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & x \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تمرین ۱۷ :

مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & ; x > 0 \\ a + 1 & ; x = 0 \\ [x + 2] + b & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2$$

$$f(0) = a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x + 2] + b = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + 2 + b = -1 + 2 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$